

FIȘĂ DE LUCRU

Numere reale. Modulul. Partea întreagă și partea fracționară

Numele și prenumele: Data:

Fișa conține 30 de probleme grupate pe cele trei niveluri de performanță din standardele naționale de evaluare (de bază – consolidat – avansat). În fiecare secțiune apar calcule, proprietăți, ecuații și inecuații. Scrie rezolvările complete; criteriile după care se apreciază o rezolvare sunt date mai jos.

Criterii de evaluare

Nivel	Itemi	Descriptori de performanță – elevul:
De bază	1 – 10	calculează modulul, partea întreagă și partea fracționară ale unor numere date (inclusiv negative sau iraționale); recunoaște proprietățile de bază; rezolvă ecuații și inecuații de forma $ ax + b = c$, $ ax + b \leq c$, $[x] = k$, în context matematic familiar.
Consolidat	11 – 22	elimină modulul după stabilirea semnului; justifică proprietăți; rezolvă ecuații de tipul $ E = F $, $ E = F$ (cu condiție), sume de module (metoda intervalelor), inecuații cu soluții reuniuni de intervale și ecuații/inecuații cu $[E(x)]$, în contexte variate.
Avansat	23 – 30	demonstrează inegalități folosind proprietățile modulului; discută numărul de soluții după un parametru; rezolvă ecuații cu module suprapuse, ecuații de tipul $[E(x)] = F(x)$ sau cu $[x]$ și $\{x\}$; generalizează un calcul, în context complex.

O rezolvare completă respectă: C1 – identificarea tipului problemei și scrierea condițiilor (semnul expresiei, membrul drept nenegativ, $k \in \mathbb{Z}$, $\{x\} \in [0, 1)$); C2 – aplicarea corectă a definițiilor și proprietăților; C3 – corectitudinea calculelor; C4 – redactarea: intersecția cu condițiile, scrierea mulțimii soluțiilor S (mulțime finită, interval sau reuniune de intervale) și verificarea.

SECȚIUNEA A – Nivel de bază (itemii 1 – 10)

Scrie rezolvările complete.

Calcule

1. Calculați $|-7| + |3 - 8| - |-2| \cdot |4|$.
2. Arătați că $|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 2| = 1$.
3. Calculați $[3, 7]$, $[-3, 7]$, $\{3, 7\}$ și $\{-3, 7\}$.
4. Determinați $[\sqrt{20}]$, $[-\sqrt{20}]$ și $\{\sqrt{20}\}$.

Proprietăți

5. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții. Justificați printr-o proprietate sau printr-un contraexemplu.
 - a) $|a + b| = |a| + |b|$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;
 - b) $|x|^2 = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
 - c) $\sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
 - d) $[x + 2] = [x] + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
 - e) $[2x] = 2[x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
6. Arătați că $|x - 3| + |x + 1| = 4$, pentru orice $x \in [-1, 3]$.

Ecuatii

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.
8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:
- a) $|2x + 1| = -3$;
 - b) $|3x - 6| = 0$.
9. Determinați numerele reale x pentru care $[x] = -2$.

Inecuații

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile și scrieți mulțimea soluțiilor sub formă de interval:
- a) $|x - 1| \leq 3$;
 - b) $[x] < 3$.

SECȚIUNEA B – Nivel consolidat (itemii 11 – 22)

Scrie rezolvările complete.

Calcule

11. Arătați că numărul $N = |1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2|$ este natural.
12. Arătați că $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 3$, pentru orice $x \in [1, 4]$.
13. Calculați $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{10}]$.

Proprietăți

14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $|a| \leq 1$ și $|b| \leq 1$. Arătați că:
- a) $|a + b| \leq 2$;
 - b) $|ab| \leq 1$.
15. a) Arătați că $[x] + [-x] = -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- b) Calculați $[\sqrt{3}] + [-\sqrt{3}] + \{\sqrt{3}\} + \{-\sqrt{3}\}$.

Ecuatii

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x - 3| = |x + 1|$.
17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 3| = 2x - 1$.
18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 1| + |x - 2| = 3$.
19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = 2$.

Inecuații

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|2x - 5| > 3$.
21. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x - 2| < 4\}$.
- a) Scrieți mulțimea A ca reuniune de intervale.
 - b) Determinați mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$.
22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|2[x] - 1| \leq 3$.

SECȚIUNEA C – Nivel avansat (itemii 23 – 30)

Scrie rezolvările complete, cu toate justificările.

Proprietăți și demonstrații

23. Numerele reale x și y verifică relațiile $|x - 2| \leq 1$ și $|y + 1| \leq 2$. Arătați că $|x + 2y| \leq 5$.
24. Se consideră expresia $E(x) = |x - 1| + |x + 2|$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- a) Arătați că $E(x) \geq 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și determinați valorile lui x pentru care $E(x) = 3$.
- b) Discutați, după valorile parametrului real m , numărul soluțiilor ecuației $E(x) = m$.

Ecuații

25. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $||x - 2| - 3| = 1$.
26. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x] = \frac{3x-1}{2}$.
27. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x] + 2\{x\} = 3$.

Inecuații

28. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|x + 1| - |x - 2| \geq 1$.

Probleme de sinteză

29. a) Verificați egalitatea $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ pentru $x = 2,3$ și pentru $x = 2,7$, apoi demonstrați că ea este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 5$.
30. (Nota 10)
- a) Arătați că, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, există exact $2k + 1$ numere naturale n cu $[\sqrt{n}] = k$.
- b) Calculați $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{99}]$.

Autoevaluare

Secțiunea	Itemii rezolvați corect	Criteriul la care am greșit cel mai des (C1–C4)	Ce reiau din sinteză
A – de bază	 din 10		
B – consolidat	 din 12		
C – avansat	 din 8		