FIȘĂ DE LUCRU · CLASA A XI-A · MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Șiruri date prin recurențe

Termenul general · Recurențe liniare de ordinul 1 și 2 · Telescopare · Radicali · Recurențe polinomiale · Recurența omografică · Monotonie și mărginire

Întrebarea fișei: Cum afli direct al 100-lea termen al unui șir dat printr-o recurență, fără să-i calculezi pe toți cei dinaintea lui, și cum îi studiezi monotonia și mărginirea?

TIPURILE 1–2	TIPURILE 3–5	TIPUL 6	PARTEA 7
Recurențe liniare	Telescopare, radicali, polinoame	Recurența omografică	Monotonie și mărginire

0 Pornim de la ce știi

Trei verificări rapide. Dacă una dintre ele îți ridică probleme, notează-o: la ea revii prima.

1. Completează: dacă (a_n) este progresie aritmetică cu $a_1 = 4$ și rația $r = 3$, atunci $a_n = \cdots$; dacă (b_n) este progresie geometrică cu $b_1 = 2$ și rația $q = 5$, atunci $b_n = \cdots$
2. Calculează $1 + 2 + \cdots + 20$ și $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$. Ce formule ai folosit?
3. Rezolvă în $\mathbb{C}$ ecuația $r^2 - 2r + 4 = 0$ și scrie soluțiile în formă trigonometrică.

I Teorie pe scurt

Pentru fiecare tip de recurență: cum îl recunoști, metoda pas cu pas (în chenarul gros) și exemple rezolvate. La final găsești schema recapitulativă și firul logic.

1. Recurența liniară de ordinul 1 Tipul 1

DEFINIȚIE

O relație de forma $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$, cu a, b numere reale, se numește **recurență liniară de ordinul 1**. Dacă $a = 1$, șirul este o progresie aritmetică. Dacă $b = 0$, șirul este o progresie geometrică.

★ Metodă Metoda punctului fix ($a \neq 1$)

1	Caut punctul fix: pun ℓ în locul lui x_{n+1} și al lui x_n. Din $\ell = a\ell + b$ obțin $\ell = \frac{b}{1-a}$.
2	Scad cele două relații: $x_{n+1} - \ell = a(x_n - \ell)$. Șirul $y_n = x_n - \ell$ este o progresie geometrică cu rația a.
3	Scriu $y_n = y_1 \cdot a^{n-1}$.
4	Mă întorc la $x_n = y_n + \ell$ și verific pe x_2.

DE REȚINUT

$$x_n = \ell + (x_1 - \ell) \cdot a^{n-1}$$

Dacă șirul începe cu x_0, exponentul devine n: $x_n = \ell + (x_0 - \ell) \cdot a^n$.

EXEMPLUL 1 · PAS CU PAS

Determină termenul general al șirului $x_1 = 5$, $x_{n+1} = 3x_n - 4$, $n \geq 1$.

Pasul 1. $\ell = 3\ell - 4 \Rightarrow \ell = 2$.

Pasul 2. $y_n = x_n - 2$ verifică $y_{n+1} = 3y_n$, iar $y_1 = 5 - 2 = 3$.

Pasul 3. $y_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Pasul 4. $x_n = 3^n + 2$. Verificare: din relație $x_2 = 11$; din formulă $9 + 2 = 11$ ✓.

EXEMPLUL 2 · CU FRACȚII

Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$, $n \geq 1$.

Pasul 1. $\ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \Rightarrow \ell = 6$.

Pașii 2–3. $y_n = x_n - 6$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$, $y_1 = -5$, deci $y_n = -\frac{5}{2^{n-1}}$.

Pasul 4. $x_n = 6 - \frac{5}{2^{n-1}}$. Verificare: $x_2 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$ și $6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$ ✓.

2. Recurența liniară omogenă de ordinul 2 Tipul 2

DEFINIȚIE

O relație de forma $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ se numește **recurență liniară omogenă de ordinul al doilea**. Fiecare termen se obține din *cei doi* termeni dinaintea lui.

★ Metodă Metoda ecuației caracteristice

1	Scriu ecuația caracteristică: înlocuiesc x_{n+2} cu r^2, x_{n+1} cu r și x_n cu 1. Obțin $r^2 = ar + b$.
2	Calculez Δ și rădăcinile. Scriu forma lui x_n după tabelul de mai jos.
3	Aflu A și B din primii doi termeni: înlocuiesc n cu indicii lor și rezolv sistemul.
4	Verific formula pe al treilea termen, calculat din relație.

Δ	Rădăcinile	Forma termenului general
$\Delta > 0$	două rădăcini reale $r_1 \neq r_2$	$x_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$
$\Delta = 0$	o rădăcină dublă r	$x_n = (A + B \cdot n) \cdot r^n$
$\Delta < 0$	$r_{1,2} = \rho(\cos t \pm i \sin t)$	$x_n = \rho^n \cdot (A \cos nt + B \sin nt)$

EXEMPLUL 3 · Δ > 0

Determină termenul general al șirului $x_0 = 2$, $x_1 = 7$, $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pașii 1–2. $r^2 - 5r + 6 = 0$, $\Delta = 1 > 0$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Deci $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.

Pasul 3. $n = 0$: $A + B = 2$; $n = 1$: $2A + 3B = 7$. Obțin $B = 3$, $A = -1$, deci $x_n = 3^{n+1} - 2^n$.

Pasul 4. Din relație: $x_2 = 5 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 23$. Din formulă: $27 - 4 = 23$ ✓.

EXEMPLUL 4 · Δ = 0

Determină termenul general al șirului $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_{n+2} = 8x_{n+1} - 16x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pașii 1–2. $r^2 - 8r + 16 = 0$, $\Delta = 0$, $r = 4$ (rădăcină dublă). Deci $x_n = (A + B \cdot n) \cdot 4^n$.

Pasul 3. $n = 0$: $A = 2$; $n = 1$: $(A + B) \cdot 4 = 4$, deci $A + B = 1$ și $B = -1$. Obțin $x_n = (2 - n) \cdot 4^n$.

Pasul 4. Din relație: $x_2 = 8 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = 0$. Din formulă: $0 \cdot 16 = 0$ ✓.

EXEMPLUL 5 · Δ < 0

Determină termenul general al șirului $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+2} = -4x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pașii 1–2. $r^2 + 4 = 0$, $\Delta = -16 < 0$, $r = \pm 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, deci $\rho = 2$, $t = \frac{\pi}{2}$ și $x_n = 2^n \cdot \left(A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

Pasul 3. $n = 0$: $A = 1$; $n = 1$: $2 \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1) = 2$, deci $B = 1$.

$$x_n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Pasul 4. Din relație: $x_2 = -4 \cdot 1 = -4$. Din formulă: $4 \cdot (-1 + 0) = -4$ ✓.

ATENȚIE · CAZUL Δ = 0

La $\Delta = 0$ nu scrii $A \cdot 4^n + B \cdot 4^n$. Aceasta este de fapt $(A + B) \cdot 4^n$, adică o singură constantă, iar sistemul pentru A și B nu are, în general, soluție. De aceea apare factorul n.

DE REȚINUT · UN TRUC PENTRU Δ < 0

Din relațiile lui Viète: $\rho = \sqrt{-b}$ și $\cos t = \frac{a}{2\rho}$, cu $t \in (0; \pi)$. Dacă $\rho = 1$, șirul se repetă (este periodic).

3. Recurențe aditive, multiplicative și mixte Tipul 3

DEFINIȚII

- **Recurență aditivă:** $x_{n+1} = x_n + f(n)$, unde $f(n)$ depinde doar de n.
- **Recurență multiplicativă:** $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$.
- **Recurență mixtă:** $x_{n+1} = a \cdot x_n + (\text{ceva cu } a^n)$.

★ Metodă Metoda telescopării

1	Scriu relația pentru $1; 2; \ldots; n-1$, una sub alta.
2	Aditivă: adun egalitățile. Multiplicativă: le înmulțesc. Mixtă: întâi împart la a^{n+1}; șirul $y_n = \frac{x_n}{a^n}$ verifică o recurență aditivă.
3	Termenii din mijloc se reduc. Calculez suma (sau produsul) care rămâne.
4	Verific formula pe x_2.

DE REȚINUT

$$x_n = x_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

$$x_n = x_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot \ldots \cdot g(n-1)$$

Sume utile:

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$1 + 3 + \cdots + (2m-1) = m^2$$

$$1 + q + \cdots + q^{m-1} = \frac{q^m - 1}{q-1} \quad (q \neq 1)$$

EXEMPLUL 6 · RECURENȚĂ ADITIVĂ

Determină termenul general al șirului $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$, $n \geq 1$.

Pasul 1. $x_2 = x_1 + 3$, $x_3 = x_2 + 5$, …, $x_n = x_{n-1} + (2n-1)$.

Pasul 2. Adun: $x_n = 3 + (3 + 5 + \cdots + (2n-1)) = 3 + (n^2 - 1)$, deci $x_n = n^2 + 2$.

Verificare: $x_2 = 3 + 3 = 6$ și $2^2 + 2 = 6$ ✓.

EXEMPLUL 7 · RECURENȚĂ MULTIPLICATIVĂ

Determină termenul general al șirului $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot x_n$, $n \geq 1$.

Pasul 1. Înmulțesc relațiile pentru $1; 2; \ldots; n-1$:

$$x_n = 2 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n+1}{n-1}$$

Pasul 2. Se simplifică „în diagonală”: rămân sus n și $n+1$, jos 1 și 2. Deci $x_n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Verificare: $x_2 = 3 \cdot 2 = 6$ și $2 \cdot 3 = 6$ ✓.

EXEMPLUL 8 · RECURENȚĂ MIXTĂ

Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + 2^n$, $n \geq 1$.

Pasul 1. Împart la 2^{n+1}: $\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2}$.

Pasul 2. $y_n = \frac{x_n}{2^n}$ este o progresie aritmetică cu rația $\frac{1}{2}$ și $y_1 = \frac{1}{2}$, deci $y_n = \frac{n}{2}$.

Pasul 3. $x_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$. Verificare: $x_2 = 2 + 2 = 4$ și $2 \cdot 2 = 4$ ✓.

ATENȚIE · CÂȚI TERMENI ARE SUMA?

Scrii relația pentru $1; 2; \ldots; n-1$, deci suma (sau produsul) are $n-1$ termeni, nu n. De aceea în formulele de mai sus apare $m = n - 1$.

4. Recurențe cu radicali Tipul 4

TREI TRUCURI

Truc 1 · Ridic la pătrat. Dacă apare $\sqrt{\ldots x_n^2 \ldots}$, notez $y_n = x_n^2$.

Truc 2 · Pătratul perfect ascuns. $x_n \pm 2\sqrt{x_n} + 1 = \left(\sqrt{x_n} \pm 1\right)^2$; notez $y_n = \sqrt{x_n}$.

Truc 3 · Logaritmez. Dacă relația are doar produse, puteri și radicali (de exemplu $x_{n+1} = c \cdot \sqrt{x_n}$), notez $y_n = \log_c x_n$. Puterile devin produse, iar produsele devin sume.

★ Metodă Metoda substituției

1	Recunosc trucul potrivit: ridic la pătrat, caut pătratul perfect ascuns sau logaritmez.
2	Fac substituția: $y_n = x_n^2$, $y_n = \sqrt{x_n}$ sau $y_n = \log_c x_n$.
3	Rezolv recurența pentru y_n: de obicei este o progresie sau o recurență de tipul 1.
4	Mă întorc la x_n, după ce verific semnul termenilor.

EXEMPLUL 9 · PĂTRATUL PERFECT ASCUNS

Determină termenul general al șirului $x_1 = 4$, $x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} + 1$, $n \geq 1$.

Pasul 1. Recunosc $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ cu $a = \sqrt{x_n}$: $x_{n+1} = \left(\sqrt{x_n} + 1\right)^2$.

Pasul 2. Termenii sunt pozitivi, deci $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt{x_n} + 1$. Șirul $y_n = \sqrt{x_n}$ este o progresie aritmetică, cu $y_1 = 2$.

Pasul 3. $y_n = n + 1$, deci $x_n = (n+1)^2$. Verificare: $x_2 = 4 + 4 + 1 = 9$ și $3^2 = 9$ ✓.

EXEMPLUL 10 · LOGARITMEZ

Determină termenul general al șirului $x_1 = 16$, $x_{n+1} = 2\sqrt{x_n}$, $n \geq 1$.

Pasul 1. Logaritmez în baza 2: $\log_2 x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\log_2 x_n$.

Pasul 2. $y_n = \log_2 x_n$ verifică $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 1$, cu $y_1 = 4$: o recurență de tipul 1!

Pasul 3. $\ell = 2$, deci $y_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 + \frac{1}{2^{n-2}}$ și $x_n = 2^{2+\frac{1}{2^{n-2}}}$.

Verificare: $x_2 = 2 \cdot 4 = 8$ și $2^{2+1} = 8$ ✓.

ATENȚIE · SEMNUL

Din $x_{n+1}^2 = \cdots$ deduci $x_{n+1} = \sqrt{\ldots}$ numai dacă știi că termenii sunt pozitivi. Verifică întâi semnul!

5. Recurențe polinomiale Tipul 5

DOUĂ SITUAȚII

A. x_{n+1} este un polinom în x_n. Caut o constantă c cu $x_{n+1}+c=(x_n+c)^k$. La gradul 2, coeficientul lui x_n trebuie să fie $2c$.

B. $x_{n+1}=a\cdot x_n+P(n)$, cu P un polinom în n și $a\neq 1$. Aceeași idee ca punctul fix: caut un polinom p_n, de același grad cu P, care verifică relația.

★ Metodă Metoda substituției

1	Caut ce „copiază” relația: constanta c (situația A) sau polinomul p_n (situația B).
2	Notez $y_n=x_n+c$ (A), respectiv $y_n=x_n-p_n$ (B).
3	A: $y_{n+1}=y_n^k$, deci $y_n=y_1^{k^{n-1}}$. B: $y_{n+1}=a\cdot y_n$, deci $y_n=y_1\cdot a^{n-1}$.
4	Mă întorc la x_n și verific pe primii termeni.

DE REȚINUT · CUM O RECUNOȘTI

„$x_{n+1}=x_n^2+2x_n$” → „$x_{n+1}+1$ este pătratul lui x_n+1” → $y_{n+1}=y_n^2$.

Dacă vezi $2x_n^2-1$, gândește-te la $\cos 2t=2\cos^2 t-1$: „unghiul se dublează”. Dacă vezi $4x_n^3-3x_n$, gândește-te la $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$.

EXEMPLUL 11 · SUBSTITUȚIA CU COSINUS

Determină termenul general al șirului $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=2x_n^2-1$, $n\geq 1$.

Pasul 1. Scriu $x_1=\cos\frac{\pi}{3}$. Atunci $x_2=2\cos^2\frac{\pi}{3}-1=\cos\frac{2\pi}{3}$.

Pasul 2. La fiecare pas unghiul se dublează. Prin inducție: $x_n=\cos\frac{2^{n-1}\pi}{3}$.

Verificare: $x_2=2\cdot\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$ ✓.

EXEMPLUL 12 · TERMEN POLINOMIAL ÎN N

Determină termenul general al șirului $x_1=1$, $x_{n+1}=2x_n+n$, $n\geq 1$.

Pasul 1. Caut $p_n=\alpha n+\beta$ cu $\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+n$.

Pasul 2. Identific: la n, $\alpha=2\alpha+1\Rightarrow\alpha=-1$; termenii liberi: $\alpha+\beta=2\beta\Rightarrow\beta=-1$.

Pasul 3. $y_n=x_n+n+1$ verifică $y_{n+1}=2y_n$, $y_1=3$, deci $y_n=3\cdot 2^{n-1}$.

Pasul 4. $x_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$. Verificare: $x_2=3$ și $6-3=3$ ✓; $x_3=8$ și $12-4=8$ ✓.

6. Recurența omografică Tipul 6

DEFINIȚIE

Un șir dat printr-o relație de forma

$$x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n + b}{c \cdot x_n + d}$$

se numește șir dat printr-o **recurență omografică**. Soluțiile ecuației $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ se numesc **punctele fixe** ale recurenței.

★ Metodă Metoda punctelor fixe

1	Rezolv ecuația punctelor fixe $x = \frac{ax+b}{cx+d}$. Obțin o ecuație de gradul al doilea.
2	Aleg substituția după numărul de soluții (tabelul de mai jos).
3	Scriu y_n (sau z_n) cu formula progresiei.
4	Mă întorc la x_n și verific pe x_2.

Punctele fixe	Substituția	Ce obțin
două: $\alpha \neq \beta$	$y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}$	(y_n) este o **progresie geometrică**
una: α	$z_n = \frac{1}{x_n - \alpha}$	(z_n) este o **progresie aritmetică**
niciuna ($\Delta < 0$)	–	caut perioada: de obicei **termenii se repetă**

DE REȚINUT · CUM GĂSESC RAȚIA

Scad punctul fix din relație. Pentru orice punct fix α:

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(a - c\alpha)(x_n - \alpha)}{c \cdot x_n + d}$$

Pentru două puncte fixe împart cele două egalități: numitorul $c \cdot x_n + d$ se simplifică.

DE REȚINUT · DACĂ NU EXISTĂ PUNCTE FIXE

De obicei șirul **se repetă**. Calculez termenii până când reapare x_1. Dacă termenii se repetă din p în p, împart indicele la p și mă uit la **rest**.

EXEMPLUL 13 · DOUĂ PUNCTE FIXE

Determină termenul general al șirului $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{4x_n - 2}{x_n + 1}$, $n \geq 1$.

Pasul 1. $x = \frac{4x-2}{x+1} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$.

Pasul 2. Scad punctele fixe din relație:

$$x_{n+1} - 1 = \frac{3(x_n - 1)}{x_n + 1}, \quad x_{n+1} - 2 = \frac{2(x_n - 2)}{x_n + 1}$$

Împart: $y_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot y_n$, unde $y_n = \frac{x_n - 1}{x_n - 2}$.

Pasul 3. $y_1 = \frac{3-1}{3-2} = 2$, deci $y_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Pasul 4. Din $y_n(x_n - 2) = x_n - 1$ obțin $x_n = \frac{2y_n - 1}{y_n - 1} = \frac{8 \cdot 3^{n-1} - 2^n}{4 \cdot 3^{n-1} - 2^n}$. Verificare: $x_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ și $\frac{24-4}{12-4} = \frac{5}{2}$ ✓.

EXEMPLUL 14 · UN SINGUR PUNCT FIX

Determină termenul general al șirului $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$, $n \geq 1$.

Pasul 1. $x(2 - x) = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ (o singură soluție).

Pasul 2. $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{2 - x_n}$. Inversez:

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{2 - x_n}{x_n - 1} = \frac{1}{x_n - 1} - 1$$

Deci $z_{n+1} = z_n - 1$, unde $z_n = \frac{1}{x_n - 1}$.

Pasul 3. $z_1 = -1$, deci $z_n = -n$.

Pasul 4. $x_n = 1 + \frac{1}{z_n} = 1 - \frac{1}{n}$. Verificare: $x_2 = \frac{1}{2}$ și $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓.

EXEMPLUL 15 · FĂRĂ PUNCTE FIXE (ȘIR PERIODIC)

Fie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = -\frac{1}{x_n + 1}$, $n \geq 1$. Calculăm x_{2026}.

Pasul 1. $x = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = -3 < 0$: nu există puncte fixe.

Pasul 2. Calculez termenii: $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{-2+1} = 1 = x_1$. Termenii se repetă din 3 în 3: $1; -\frac{1}{2}; -2; 1; -\frac{1}{2}; -2;$ ...

Pasul 3. $2026 = 3 \cdot 675 + 1$. Restul este 1, deci $x_{2026} = x_1 = 1$.

7. Monotonia și mărginirea unui șir dat prin recurență Partea 7

REAMINTIM

Șirul (x_n) este **crescător** dacă $x_n \leq x_{n+1}$ și **strict crescător** dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru orice n. Analog pentru **descrescător** și **strict descrescător**.

Șirul (x_n) este **mărginit** dacă există numerele m și M astfel încât $m \leq x_n \leq M$, pentru orice n.

★ Metodă Metoda · Monotonie și mărginire

1	Calculez primii termeni și fac o presupunere: crește? scade? între ce valori rămâne?
2	Dacă știu termenul general, studiez direct semnul diferenței $x_{n+1} - x_n$ și găsesc marginile din formulă.
3	Dacă nu știu termenul general, demonstrez prin inducție o margine. Pentru o recurență cu punct fix α, semnul lui $x_{n+1} - \alpha$ arată de ce parte a lui α rămâne șirul.
4	Studiez semnul lui $x_{n+1} - x_n$ cu ajutorul relației și al marginii găsite.
5	Scriu concluzia: șirul este (strict) crescător sau descrescător și $m \leq x_n \leq M$.

DE REȚINUT

- Un șir **crescător** este mărginit inferior de primul termen. Un șir **descrescător** este mărginit superior de primul termen. Rămâne de găsit o singură margine.
- Pentru un șir cu termeni pozitivi pot compara și raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1.
- Dacă $x_{n+1} - \alpha = k \cdot (x_n - \alpha)$ cu $k > 0$, toți termenii sunt de aceeași parte a lui α ca x_1 (prin inducție).

EXEMPLUL 16 · DIN TERMENUL GENERAL

Studiem monotonia și mărginirea șirului din Exemplul 14, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Monotonie: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, deci șirul este strict crescător.

Mărginire: șirul este crescător, deci $x_n \geq x_1 = 0$. Apoi $x_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Deci $0 \leq x_n < 1$: șirul este mărginit.

EXEMPLUL 17 · DIRECT DIN RELAȚIA DE RECURENȚĂ

Fie $x_1 = 6$, $x_{n+1} = \frac{5x_n+4}{x_n+2}$, $n \geq 1$. Arătăm că șirul este monoton și mărginit.

Punctele fixe: $x^2 + 2x = 5x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$, deci $\alpha = 4$ și $\beta = -1$.

Mărginire: $x_{n+1} - 4 = \frac{x_n-4}{x_n+2}$. Dacă $x_n > 4$, atunci $x_{n+1} > 4$. Cum $x_1 = 6 > 4$, prin inducție $x_n > 4$ pentru orice n.

Monotonie: $x_{n+1} - x_n = \frac{5x_n+4-x_n^2-2x_n}{x_n+2} = -\frac{(x_n-4)(x_n+1)}{x_n+2} < 0$, deci șirul este strict descrescător.

Concluzie: șirul este descrescător, deci $x_n \leq x_1 = 6$. Așadar $4 < x_n \leq 6$: șirul este mărginit.

ATENȚIE · ȘIRURI CARE NU SUNT MONOTONE SAU NU SUNT MĂRGINITE

Ca să arăți că un șir **nu este monoton**, ajung trei termeni, de exemplu $x_0 < x_1$ și $x_1 > x_2$. Ca să arăți că **nu este mărginit**, arată că termenii depășesc orice număr.

Exemplu: șirul din Exemplul 5, $x_n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right)$. Avem $x_0 = 1 < x_1 = 2$ și $x_1 > x_2 = -4$, deci șirul nu este monoton. Pentru $n = 4k$: $x_{4k} = 16^k$, iar 16^k depășește orice număr, deci șirul nu este mărginit.

Schemă recapitulativă: cum recunosc tipul recurenței

Tipul	Forma relației	Ce fac
1 · Liniară de ordinul 1	$x_{n+1} = ax_n + b$	punctul fix: $\ell = a\ell + b$ apoi $x_n = \ell + (x_1 - \ell)a^{n-1}$
2 · Liniară de ordinul 2	$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$	ecuația caracteristică $r^2 = ar + b$ forma lui x_n după Δ la $\Delta = 0$ apare factorul n
3 · Aditivă, multiplicativă, mixtă	$x_{n+1} = x_n + f(n)$ $x_{n+1} = g(n)x_n$ $x_{n+1} = ax_n + (\text{ceva cu } a^n)$	adun relațiile înmulțesc relațiile împart la a^{n+1}
4 · Cu radicali	$\sqrt{\ldots}$ în relație	ridic la pătrat, caut $\left(\sqrt{x_n} \pm 1\right)^2$ sau logaritmez verific semnul
5 · Polinomială	$x_{n+1} = P(x_n)$ $x_{n+1} = ax_n + P(n)$	$x_{n+1} + c = (x_n + c)^k$ $2x_n^2 - 1 \to$ cosinus polinomul p_n
6 · Omografică	$x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$	punctele fixe $y_n = \frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}$ sau $z_n = \frac{1}{x_n - \alpha}$ fără puncte fixe → perioada

DE REȚINUT · IDEEA COMUNĂ

La tipurile 1, 5 și 6 caut ce rămâne neschimbat: **punctul fix** ℓ, polinomul p_n sau **punctele fixe**. Scăzându-le din relație, obțin o progresie.

★ Cel mai important **Firul logic: ce faci când întâlnești o recurență**

Urmează pașii în această ordine, la fiecare problemă

1	Calculez primii 3–4 termeni.
2	Recunosc forma relației (tipul 1–6).
3	Aleg metoda: punctul fix (sau punctele fixe), Δ, telescoparea, o substituție.
4	Aflu constantele din primii termeni.
5	Verific formula pe încă un termen.
6	Studiez monotonia și mărginirea: din formulă sau direct din relație.

II Probleme pe niveluri

La fiecare problemă scrie, pe lângă răspuns, ce tip de recurență ai recunoscut și după ce. Verifică orice formulă pe primii termeni.

Nivel de bază

1. Clasifică fiecare recurență (tipul 1–6 sau progresie) și scrie primul pas al metodei:

   a) $x_{n+1} = x_n + n^2$; b) $x_{n+1} = 7x_n - 6$; c) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$;

   d) $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 7}$; e) $x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 2$; f) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n$;

   g) $x_{n+1} = 5x_n + 2n - 1$; h) $x_{n+1} = 5x_n + 5^n$; i) $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{x_n+2}$.

2. Determină termenul general ($n \geq 1$):

   a) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + 5$; b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = -2x_n$;

   c) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 2x_n - 3$; d) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 4x_n - 3$.

3. Fie $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2$, $n \geq 1$.

   a) Determină termenul general.

   b) Arată că șirul este strict crescător și că $0 \leq x_n < 3$, pentru orice $n \geq 1$.

4. Determină $a \in \mathbb{R}$ astfel încât șirul $x_1 = 2$, $x_{n+1} = a \cdot x_n + 6$ să fie constant.

5. Scrie ecuația caracteristică, calculează Δ și scrie forma lui x_n (fără să afli A și B):

   a) $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n$; b) $x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n$; c) $x_{n+2} = -9x_n$.

6. Determină termenul general ($n \in \mathbb{N}$):

a) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$; b) $x_0 = 2, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$;

c) $x_0 = 0, x_1 = 5, x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4x_n$; d) $x_0 = 1, x_1 = 5, x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$.

7. Fie $x_0 = 3, x_1 = 6$ și $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determină x_n.

b) Arată că șirul este strict crescător. Este șirul mărginit?

8. Determină termenul general ($n \in \mathbb{N}$):

a) $x_0 = 2, x_1 = 9, x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$; b) $x_0 = 1, x_1 = 15, x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n$.

9. Determină termenul general ($n \geq 1$):

a) $x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 4n$; b) $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + 2^n$.

10. Determină termenul general ($n \geq 1$), apoi studiază monotonia și mărginirea șirului:

a) $x_1 = 1, x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n$; b) $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot x_n$.

11. Fie șirul cu termeni pozitivi $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 5}$, $n \geq 1$.

a) Determină termenul general.

b) Arată că șirul este strict crescător.

12. Determină punctele fixe. Spune ce substituție folosești:

a) $x_{n+1} = \frac{x_n+6}{x_n}$; b) $x_{n+1} = \frac{4x_n-1}{x_n+2}$; c) $x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{x_n+2}$.

13. Fie $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = \frac{5x_n-4}{x_n+1}$, $n \geq 1$.

a) Arată că ecuația punctelor fixe are o singură soluție.

b) Arată că $z_n = \frac{1}{x_n-2}$ este o progresie aritmetică.

c) Determină x_n.

d) Studiază monotonia și mărginirea șirului.

14. Fie $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n-3}{x_n-2}$, $n \geq 1$.

a) Arată că nu există puncte fixe.

b) Calculează x_2, x_3, x_4. Ce observi?

c) Calculează x_{2027}.

Nivel consolidat

15. Se dă relația $x_{n+1} = 4x_n - 9$, $n \geq 1$.

a) Determină x_1 astfel încât șirul să fie constant.

b) Pentru $x_1 = 5$, determină termenul general.

16. Fie $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = 5 - x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
    a) Determină termenul general și explică de ce termenii se repetă.
    b) Este șirul monoton? Este mărginit?

17. Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n$, $n \geq 1$.

18. Fie $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ și $x_{n+2} = -6x_{n+1} - 9x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
    a) Determină x_n. *Indicație:* rădăcina dublă este negativă.
    b) Arată că șirul nu este monoton.

19. Fie $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ și $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
    a) Arată că $r_{1,2} = -1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
    b) Determină x_n.

20. Determină termenul general al șirului $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

21. Fie $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ și $x_{n+2} = -x_{n+1} - x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
    a) Calculează x_2, x_3, x_4, x_5. Ce observi?
    b) Arată că $x_{n+3} = x_n$ pentru orice n.
    c) Calculează x_{2026} și suma $x_0 + x_1 + \cdots + x_{29}$.
    d) Arată că șirul este mărginit, dar nu este monoton.

22. Fie $x_0 = 2$, $x_1 = 1$ și $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
    a) Calculează $x_2; x_3; \ldots; x_7$. Ce observi?
    b) Determină termenul general.
    c) Calculează x_{2026}.

23. Determină termenul general ($n \geq 1$):
    a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n(n+1)}$; b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3n^2 + 3n + 1$. *Indicație:* calculează $(k+1)^3 - k^3$.
    c) Arată că șirul de la a) este strict crescător și mărginit.

24. Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + n \cdot n!$, $n \geq 1$. *Indicație:* $(k+1)! - k! = k \cdot k!$.

25. Determină termenul general ($n \geq 1$):
    a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n + 3^{n+1}$; b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n + (n+1)!$.

26. Determină termenul general ($n \geq 1$, termeni pozitivi):
    a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1}$; b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 4\sqrt{x_n} + 4$;
    c) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3\sqrt{x_n}$; d) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.
    e) Arată că șirul de la c) este strict crescător și că $3 \leq x_n < 9$.

27. Determină termenul general ($n \geq 1$):

a) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$; b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n - 2n$.

28. Fie $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{3x_n+2}{x_n+4}$, $n \geq 1$.

a) Arată că $y_n = \frac{x_n-1}{x_n+2}$ este o progresie geometrică.

b) Determină x_n.

c) Arată că $1 < x_n \leq 2$, pentru orice $n \geq 1$.

d) Arată că șirul este strict descrescător.

29. Fie $x_1 = 0$ și $x_{n+1} = \frac{x_n+6}{x_n+2}$, $n \geq 1$.

a) Calculează x_2 și x_3.

b) Arată că $y_n = \frac{x_n-2}{x_n+3}$ este o progresie geometrică și determină x_n.

c) Arată că șirul nu este monoton.

d) Arată că $0 \leq x_n \leq 3$, pentru orice $n \geq 1$.

30. Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{3x_n+4}{x_n+3}$, $n \geq 1$.

a) Arată că $1 \leq x_n < 2$, pentru orice $n \geq 1$. *Indicație:* calculează $x_{n+1} - 2$.

b) Arată că șirul este strict crescător. *Indicație:* calculează $x_{n+1} - x_n$.

31. Fie $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{3x_n-1}{x_n+1}$, $n \geq 1$.

a) Arată că ecuația punctelor fixe are o singură soluție.

b) Determină x_n.

c) Arată, folosind formula de la b), că șirul este strict descrescător și că $1 < x_n \leq 2$.

32. Fie $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$, $n \geq 1$.

a) Arată că nu există puncte fixe.

b) Calculează x_2, x_3, x_4, x_5. Din câți în câți termeni se repetă șirul?

c) Calculează x_{2026}.

Nivel avansat

33. Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

34. Determină termenul general ($n \geq 1$):

a) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = 3^n \cdot x_n$; b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot x_n$.

c) Arată că șirul de la b) este strict descrescător și mărginit.

35. Determină termenul general al șirului $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n$, $n \geq 1$.

36. Se dă șirul $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, $n \geq 1$. Determină termenul general și explică de ce, de la un rang încolo, șirul este constant.

37. Fie $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $n \geq 1$.

    a) Determină termenul general. *Indicație:* $1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$.

    b) Arată că șirul este strict crescător și că $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$.

38. Determină termenul general al șirului $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 2x_n + n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

39. *Șirul lui Fibonacci:* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

    a) Arată că $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

    b) Arată că șirul este crescător și că $F_n \geq n - 1$, pentru orice $n \geq 1$. Este șirul mărginit?

40. Fie $x_0 = 2$, $x_1 = 2$ și $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

    a) Arată că $x_n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$.

    b) Explică de ce toți termenii șirului sunt numere întregi.

41. Fie relația $x_{n+2} = m \cdot x_{n+1} - 36x_n$, $n \in \mathbb{N}$, cu $m > 0$.

    a) Determină m pentru care ecuația caracteristică are o rădăcină dublă.

    b) Pentru această valoare și $x_0 = 1$, $x_1 = 12$, determină x_n.

42. Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{x_n+2}$, $n \geq 1$.

    a) Calculează x_2 și x_3.

    b) Arată că $1 \leq x_n < \sqrt{3}$, pentru orice $n \geq 1$, și că șirul este strict crescător.

    c) Determină x_n. *Indicație:* folosește $y_n = \frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}$.

43. Fie $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot x_n}$, $n \geq 1$.

    a) Calculează x_2, x_3, x_4 și x_{2026}.

    b) Scrie $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ și $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$. Ce legătură vezi cu formula pentru $\operatorname{tg}(a+b)$?

44. *Găsește greșeala.* Un elev scrie: „$x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 2n$. Am calculat $x_2 = 3$ și $x_3 = 7$. Deci $x_n = 2^n - 1$.”

    a) Indică primul pas greșit și dă un contraexemplu.

    b) Scrie formula corectă.

45. *Provocare.* Pentru $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, $n \geq 1$, arată că $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$, unde $t + \frac{1}{t} = 3$.

III Recurențe din viața reală

Situațiile de mai jos sunt inventate, dar seamănă cu cele pe care le întâlnești în jurul tău. Traduci o poveste într-o relație de recurență și o folosești ca să prezici ce urmează.

A. Economii. Pui 1000 de lei într-un cont cu dobândă de 5% pe an și, la sfârșitul fiecărui an, mai adaugi 200 de lei. Notează cu s_n suma după n ani ($s_0 = 1000$).

B. Medicament. Un pacient ia în fiecare dimineață 100 mg dintr-un medicament. În 24 de ore, organismul elimină jumătate din cantitatea existentă. Notează cu m_n cantitatea imediat după a n-a doză.

C. Pești în lac. Într-un lac sunt 1000 de pești. În fiecare an populația crește cu 20%, apoi se pescuiesc 300 de pești. Notează cu p_n numărul de pești după n ani ($p_0 = 1000$).

D. Turnurile din Hanoi. Pentru a muta un turn de $n + 1$ discuri, muți turnul de deasupra (n discuri), apoi discul mare, apoi din nou turnul de n discuri. Notează cu h_n numărul de mutări pentru n discuri ($h_1 = 1$).

PENTRU FIECARE SITUAȚIE

1. Scrie relația de recurență și primul termen.
2. Recunoaște tipul și determină termenul general.
3. Verifică formula pe primii doi termeni, calculați direct din poveste.
4. Studiază monotonia și mărginirea șirului. (B: arată că $m_n < 200$ pentru orice n. C: în al câtelea an se termină peștii?)