FIȘĂ DE LUCRU · CLASA A IX-A · MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Sume și inducție matematică

Simbolul Σ · Termenul general · Proprietățile sumelor · Sume remarcabile · Metoda inducției matematice

Întrebarea fișei: Cum calculezi repede o sumă cu foarte mulți termeni și cum ești sigur că formula găsită este adevărată pentru orice n?

PARTEA 1	PARTEA 2	PARTEA 3	PARTEA 4	PARTEA 5
Scrierea cu Σ	Termenul general	Proprietăți	Sume remarcabile	Inducția matematică

0 Pornim de la ce știi

Trei verificări rapide. Dacă una dintre ele îți ridică probleme, notează-o: la ea revii prima.

1. Calculează $1+2+3+\cdots+100$. Indicație: adună primul termen cu ultimul, al doilea cu penultimul, …
2. Scrie următorii doi termeni: a) $1; 4; 9; 16;$ … b) $2; 5; 8; 11;$ …
3. Dezvoltă: $(k+1)^2$ și $(k+1)^3$.

I Teorie pe scurt

1. Simbolul Σ (sigma) Partea 1

DEFINIȚIE · SCRIEREA PRESCURTATĂ A UNEI SUME

Suma $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ se scrie prescurtat:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

și se citește „suma de la k egal cu 1 la n din a_k”.

- k este **indicele de sumare**: ia, pe rând, valorile $1; 2; \ldots; n$. Litera nu contează: $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
- 1 este **limita inferioară**, iar n este **limita superioară** a sumei.
- a_k este **termenul general** al sumei: regula după care se obține fiecare termen.
- Suma $\sum_{k=m}^{n} a_k$ are $n-m+1$ termeni.

EXEMPLE · SCRIEM DESFĂȘURAT

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$\sum_{k=3}^{6}(2k+1) = 7 + 9 + 11 + 13 = 40$ (are $6 - 3 + 1 = 4$ termeni)

$\sum_{k=1}^{5} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ (termenul general nu depinde de k)

2. Cum scriem o sumă cu Σ: găsim termenul general Partea 2

METODĂ

Pasul 1. Numerotezi termenii: primul are $k = 1$, al doilea $k = 2$, …

Pasul 2. Observi ce se schimbă de la un termen la altul și ce rămâne la fel.

Pasul 3. Scrii termenul general a_k ca expresie în k.

Pasul 4. Afli limita superioară din ultimul termen: rezolvi ecuația a_k = ultimul termen.

Pasul 5. Verifici formula pe primul și pe ultimul termen.

EXEMPLUL 1 · GĂSIM TERMENUL GENERAL

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$: numerele impare, $a_k = 2k - 1$. Pentru $k = 1$ obții 1, pentru $k = n$ obții $2n - 1$. Deci suma este $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$: fiecare termen este produsul a două numere consecutive, $a_k = k(k+1)$. Suma este $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

c) $2 + 5 + 8 + \cdots + 152$: termenii cresc mereu cu 3, deci $a_k = 3k + c$. Din $a_1 = 2$ rezultă $c = -1$, adică $a_k = 3k - 1$. Din $3k - 1 = 152$ obții $k = 51$. Suma este $\sum_{k=1}^{51}(3k-1)$.

CUM ÎL RECUNOȘTI

Termenii cresc mereu cu același număr $d \rightarrow a_k = d \cdot k + c$. Pătrate, cuburi $\rightarrow k^2, k^3$. Semne alternante $+, -, +, \ldots \rightarrow$ factorul $(-1)^{k+1}$.

3. Proprietățile sumelor Partea 3

PROPRIETĂȚI · DE REȚINUT

(P1) Factorul constant iese în fața sumei. Dacă c nu depinde de k:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(P2) Suma (diferența) se „sparge” în două sume.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Liniaritatea reunește (P1) și (P2): pentru orice numere α și β care nu depind de k,

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$$

(P3) Suma se poate împărți în două bucăți. Pentru $1 \leq m < n$:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k$$

ATENȚIE · GREȘELI FRECVENTE

- $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = n \cdot c$, nu c: constanta apare de n ori.
- Produsul **nu** se sparge: $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$. Pentru $n = 2$ și $a_k = b_k = k$: $1 + 4 = 5$, dar $3 \cdot 3 = 9$.
- Iese în fața sumei doar ce **nu depinde** de k: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k \neq k \cdot \sum_{k=1}^{n} k$.

4. Sume remarcabile Partea 4

Cele patru formule de mai jos se folosesc în aproape orice calcul de sume. *Învață-le pe de rost.*

(S1) Suma unei constante

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$

Exemplu: $\sum_{k=1}^{10} 7 = 70$

(S2) Suma primelor n numere naturale nenule

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplu: $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$

(S3) Suma pătratelor

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exemplu: $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385$

(S4) Suma cuburilor

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exemplu: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$

METODĂ · CALCULUL UNEI SUME

Pasul 1. Scrii suma cu Σ (afli termenul general).

Pasul 2. Desfaci termenul general într-o sumă de puteri ale lui k: k^3, k^2, k, constante.

Pasul 3. Spargi suma (P2) și scoți constantele în față (P1).

Pasul 4. Aplici sumele remarcabile (S1)–(S4) și aduci rezultatul la forma cea mai simplă.

Pasul 5. Verifici formula pentru $n = 1$ și $n = 2$.

EXEMPLUL 2 · PAS CU PAS

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

b) $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$.

Pasul 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k)$

Pasul 2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

Pasul 3. Dăm factor comun $\frac{n(n+1)}{6}$: $S_n = \frac{n(n+1)}{6} \cdot (2n + 1 + 3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Verificare: $n = 1$: $1 \cdot 2 = 2$ și $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$ ✓; $n = 2$: $2 + 6 = 8$ și $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8$ ✓.

c) Cu (P3): $11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = 2870 - 385 = 2485$.

5. Metoda inducției matematice Partea 5

EXPLOREAZĂ · AJUNG CÂTEVA VERIFICĂRI?

La Exemplul 2 b) am verificat formula pentru $n = 1$ și $n = 2$. Am putea verifica și pentru $n = 3, n = 4, \ldots, n = 100$.

Ar fi aceasta o demonstrație pentru **orice** n? Cum ai putea fi sigur, fără să verifici la nesfârșit?

PRINCIPIUL INDUCȚIEI MATEMATICE

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de numărul natural $n \geq n_0$. Dacă:

Etapa I (verificarea). $P(n_0)$ este adevărată;

Etapa a II-a (demonstrația). pentru orice $k \geq n_0$, din $P(k)$ adevărată rezultă $P(k+1)$ adevărată, adică $P(k) \Rightarrow P(k+1)$,

atunci $P(n)$ este adevărată **pentru orice** $n \geq n_0$.

Imaginea: un șir de piese de domino. Prima piesă cade (etapa I) și fiecare piesă o dărâmă pe următoarea (etapa a II-a). Atunci cad toate piesele.

CUM REDACTĂM

„Notăm $P(n)$: …, $n \geq n_0$.

Etapa I. $P(n_0)$: … (calculez separat cei doi membri) …, deci $P(n_0)$ este adevărată.

Etapa a II-a. Presupunem $P(k)$ adevărată (**ipoteza de inducție**) și demonstrăm $P(k+1)$. Pornim de la membrul stâng al lui $P(k+1)$, folosim ipoteza de inducție și ajungem la membrul drept.

Conform principiului inducției matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$."

EXEMPLUL 3 · DEMONSTRĂM PRIN INDUCȚIE FORMULA DE LA EXEMPLUL 2 B)

$P(n)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \geq 1$.

Etapa I. $P(1)$: membrul stâng este $1 \cdot 2 = 2$, membrul drept este $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$. Deci $P(1)$ este adevărată.

Etapa a II-a. Presupunem $P(k)$: $1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$. Demonstrăm $P(k+1)$: $1 \cdot 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

Membrul stâng $= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2) \cdot \left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$, adică membrul drept.

Concluzie. Conform principiului inducției matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 1$.

ATENȚIE · AMBELE ETAPE SUNT OBLIGATORII

Fie $P(n)$: $1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n+2}{2}$. Etapa a II-a funcționează: dacă $P(k)$ ar fi adevărată, atunci $\frac{k^2+k+2}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$. Dar $P(1)$ este falsă ($1\neq 2$), iar formula este falsă pentru orice n. Fără etapa I, „demonstrația” nu demonstrează nimic.

Invers: verificările pentru $n=1,2,3,\ldots$ nu înlocuiesc etapa a II-a. Exemplele nu demonstrează.

Firul logic: de la sumă la formulă demonstrată

Scriu suma cu Σ ▸ Desfac termenul general ▸ Aplic (P1), (P2) și (S1)–(S4) ▸ Verific pentru n = 1 și n = 2 ▸ Demonstrez prin inducție

II Probleme pe niveluri

La fiecare problemă scrie pașii, nu doar rezultatul: ce proprietate sau ce sumă remarcabilă folosești. Demonstrațiile prin inducție se redactează complet, cu ambele etape.

Nivel de bază

1. Scrie desfășurat, apoi calculează:

   a) $\sum_{k=1}^{5} k$; b) $\sum_{k=1}^{4}(2k+3)$; c) $\sum_{k=2}^{5} k^2$; d) $\sum_{k=1}^{6} 4$; e) $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\cdot k$.

2. Câți termeni are fiecare sumă? a) $\sum_{k=1}^{20} a_k$; b) $\sum_{k=5}^{30} a_k$; c) $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

3. Scrie cu simbolul Σ, după ce afli termenul general:

   a) $2+4+6+\cdots+40$; b) $1+4+9+\cdots+100$;

   c) $3+7+11+\cdots+(4n-1)$; d) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

4. Calculează, folosind sumele remarcabile:

   a) $1+2+\cdots+50$; b) $1^2+2^2+\cdots+12^2$; c) $1^3+2^3+\cdots+6^3$; d) $\sum_{k=1}^{15} 3$.

5. Calculează, folosind proprietățile sumelor:

   a) $\sum_{k=1}^{20}(3k+2)$; b) $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$; c) $\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$.

6. Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

   a) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; b) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Nivel consolidat

7. Scrie cu Σ, apoi calculează:

   a) $1+5+9+\cdots+(4n-3)$; b) $1\cdot 4+2\cdot 5+\cdots+n(n+3)$;

   c) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$.

8. Fie $S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$.

   a) Calculează S_n, folosind proprietățile și sumele remarcabile.

   b) Demonstrează prin inducție formula obținută la a).

9. Calculează, folosind proprietatea (P3):

   a) $\sum_{k=21}^{40} k$; b) $\sum_{k=6}^{15} k^2$; c) $\sum_{k=n+1}^{2n} k$.

10. Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

    a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

11. Determină numărul natural nenul n pentru care:

    a) $1 + 2 + \cdots + n = 210$; b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 3025$.

Nivel avansat

12. *Sumă telescopică.*

    a) Verifică egalitatea $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

    b) Calculează $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Indicație: scrie desfășurat și urmărește ce se reduce.

    c) Demonstrează prin inducție rezultatul de la b).

13. Fie $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

    a) Calculează T_n și scrie rezultatul ca produs de factori.

    b) Demonstrează prin inducție formula obținută.

    c) Compară cu $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ și cu $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Ce regulă observi? Ce formulă propui pentru $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$?

14. Demonstrează prin inducție că $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

15. *Găsește greșeala.* Un elev scrie: „Fie $P(n)$: $2 + 4 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$. Presupun $P(k)$. Atunci $2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k+1) = k^2 + k + 1 + 2k + 2 = (k+1)^2 + (k+1) + 1$, deci $P(k+1)$ este adevărată. Prin urmare, formula este adevărată pentru orice n.”

    a) Verifică formula pentru $n = 1$. b) Ce etapă lipsește? c) Care este formula corectă? Demonstreaz-o.

16. *Provocare.* Demonstrează prin inducție că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

    Ce poți spune despre suma $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}$?