

Fișă de recapitulare – Permutări

Nume și prenume: _____ Data: _____

Notății. S_n – mulțimea permutărilor de grad n ; e – permutarea identică; $m(\sigma)$ – numărul inversiunilor permutării σ ; $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ – semnul permutării σ ; $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$, unde $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$.

Nivelul I – probleme de bază (problemele 1–17)

- Scrieți toate elementele mulțimii S_3 .
 - Câte elemente au mulțimile S_4 și S_5 ?
- Se consideră funcțiile $f, g: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, unde $f(x)$ este restul împărțirii lui $3x$ la 5, iar $g(x)$ este restul împărțirii lui x^2 la 5. Stabiliți care dintre ele este permutare și scrieți-o sub forma unui tabel cu două linii.
- Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați $\sigma(1) + \sigma(4)$, $\sigma(\sigma(2))$ și $\sigma^{-1}(4)$.
- Determinați numerele naturale x și y pentru care $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+y & 4 & x-y & 2 \end{pmatrix} \in S_4$.
- Determinați numerele reale a, b, c pentru care $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a-1 & b+1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$. Este compunerea permutărilor comutativă? Verificați că $(\sigma\tau)\sigma = \sigma(\tau\sigma)$.
- Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați σ^2 , σ^3 și σ^4 .
- Determinați inversa permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și verificați că $\sigma\sigma^{-1} = e$.
- Determinați numărul inversiunilor și semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- Stabiliți paritatea permutărilor: $e \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
- Fie $\tau \in S_4$ transpoziția care schimbă între ele numerele 1 și 4. Scrieți τ sub formă de tabel, calculați τ^2 , τ^{-1} și $\varepsilon(\tau)$.
- Calculați $m(\sigma)$ și $\varepsilon(\sigma)$ pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați σ^{-1} și σ^2 . Arătați că $\sigma^2 = \sigma^{-1}$ și $\sigma^3 = e$.
- Rezolvați în S_3 ecuația $\sigma x = \tau$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Rezolvați în S_3 ecuația $x\sigma = \tau$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comparați soluția cu cea de la problema 14.
16. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$ și verificați egalitatea $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.
17. a) Câte permutări $\sigma \in S_4$ verifică $\sigma(1) = 1$?
 b) Câte permutări $\sigma \in S_4$ verifică $\sigma(1) = 2$ și $\sigma(2) = 1$?
 c) Scrieți toate transpozițiile din S_4 .

Nivelul II – probleme de nivel mediu (problemele 18–35)

18. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Arătați că $\sigma^2 = e$ și calculați σ^{2026} și σ^{2027} .
19. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $\sigma^4 = e$ și calculați σ^{2026} .
20. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Determinați cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\sigma^k = e$ și calculați σ^{100} .
21. Rezolvați în S_4 ecuația $axb = c$, unde $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
22. Fie $n \geq 2$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $m(\sigma)$ și stabiliți pentru ce valori ale lui n permutarea σ este pară.
23. Scrieți permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziții și deduceți semnul ei. Verificați rezultatul numărând inversiunile.
24. Arătați că $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, pentru orice $\sigma \in S_n$. Verificați pentru $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
25. Determinați toate permutările $x \in S_3$ pentru care $x^2 = e$.
26. Determinați toate permutările $x \in S_3$ pentru care $x^3 = e$.
27. Determinați permutările $\sigma \in S_3$ care verifică $\sigma\tau = \tau\sigma$, unde $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
28. a) Câte permutări pare conține S_4 ?
 b) Câte permutări din S_4 au exact două inversiuni? Scrieți-le.
29. Determinați $a, b \in \{2, 5\}$, $a \neq b$, astfel încât permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & a & 1 & b & 3 \end{pmatrix}$ să fie pară.
30. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculați $\varepsilon(\sigma^{2026}\tau^{-1})$.

31. Rezolvați în S_3 ecuația $x^2 = \sigma$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
32. Determinați numărul inversiunilor și semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
33. a) Arătați că, pentru orice transpoziție $\tau \in S_n$, avem $\tau^2 = e$ și $\tau^{-1} = \tau$.
b) Arătați că S_n conține $\frac{n(n-1)}{2}$ transpoziții.
c) Determinați n știind că S_n conține 28 de transpoziții.
34. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați σ^3 și rezolvați în S_4 ecuația $\sigma^2 x = \tau$.
35. Arătați că ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nu are soluții în S_3 .

Nivelul III – probleme de aprofundare (problemele 36–50)

36. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$.
a) Arătați că $m(\sigma) = \frac{n(n+1)}{2}$.
b) Stabiliți semnul lui σ pentru $n = 2026$.
37. Rezolvați în S_4 ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
38. Determinați permutările $x \in S_3$ pentru care $x^{2027} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
39. Arătați că $\sigma^{12} = e$, pentru orice $\sigma \in S_4$. Există un număr natural $1 \leq k < 12$ cu proprietatea că $\sigma^k = e$ pentru orice $\sigma \in S_4$?
40. Câte permutări $\sigma \in S_6$ verifică $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$?
41. Un număr i se numește punct fix al permutării σ dacă $\sigma(i) = i$. Câte permutări din S_4 nu au niciun punct fix? Dar din S_5 ?
42. Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, știind că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are 45 de inversiuni.
43. Fie $n \geq 2$ și $\tau \in S_n$ o transpoziție. Arătați că funcția $f: S_n \rightarrow S_n$, $f(\sigma) = \tau\sigma$ este bijectivă și transformă permutările pare în permutări impare. Deduceți că S_n conține $\frac{n!}{2}$ permutări pare și $\frac{n!}{2}$ permutări impare.
44. Fie A_n mulțimea permutărilor pare din S_n . Arătați că dacă $\sigma, \tau \in A_n$, atunci $\sigma\tau \in A_n$ și $\sigma^{-1} \in A_n$.
45. Arătați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.
46. Determinați permutările $\sigma \in S_3$ care verifică $\sigma x = x\sigma$, pentru orice $x \in S_3$.
47. Arătați că ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ nu are soluții în S_4 .

48. Fie $\sigma \in S_n$ și $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $m(\sigma\rho) = \frac{n(n-1)}{2} - m(\sigma)$.

49. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determinați numărul inversiunilor și semnul lui σ .

b) Arătați că $\sigma^6 = e$.

c) Calculați σ^{2026} .

d) Arătați că ecuația $x^2 = \sigma$ nu are soluții în S_5 .

50. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați σ^{-1} .

b) Determinați numărul permutărilor $x \in S_4$ pentru care $\varepsilon(x\sigma) = 1$.

c) Rezolvați în S_4 ecuația $\sigma x \sigma = e$.