TEMĂ SUPLIMENTARĂ · CLASA A IX-A · MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Sume și inducție matematică

Pentru cei care vor să exerseze mai mult · Problemele se rezolvă în caiet, cu toți pașii

Cum lucrezi: alege nivelul de la care pornești. Dacă rezolvi fără greutate problemele unui nivel, treci la următorul. Recitește întâi teoria din fișa de lucru: proprietățile (P1)–(P3) și sumele remarcabile (S1)–(S4).

DE REȚINUT

$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Inducție: **Etapa I** $P(n_0)$ adevărată; **Etapa a II-a** $P(k) \Rightarrow P(k+1)$; concluzie: $P(n)$ adevărată pentru orice $n \geq n_0$.

Nivel de bază

1. Scrie desfășurat, apoi calculează:

   a) $\sum_{k=1}^{6}(3k-1)$; b) $\sum_{k=0}^{4} 2^k$; c) $\sum_{k=3}^{7}(k^2-1)$; d) $\sum_{k=1}^{100}(-1)^k$.

2. Scrie cu simbolul Σ, după ce afli termenul general:

   a) $5 + 10 + 15 + \cdots + 200$; b) $1 + 8 + 27 + \cdots + 1000$;

   c) $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n-2)$; d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + n(2n+1)$;

   e) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}$.

3. Calculează, folosind sumele remarcabile:

   a) $1 + 2 + \cdots + 200$; b) $1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2$;

   c) $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$; d) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$.

4. Calculează, folosind proprietățile sumelor:

   a) $\sum_{k=1}^{n}(6k+1)$; b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)$; c) $\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)$.

5. Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

   a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$; b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Nivel consolidat

6. Scrie cu Σ, apoi calculează:

   a) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1)$; b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$;

   c) $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \cdots + n(n+4)$.

7. Fie $S_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1) \cdot 2n$.

   a) Scrie S_n cu Σ și calculează-l.

   b) Demonstrează prin inducție formula obținută la a).

8. Calculează:

   a) $\sum_{k=11}^{30} k$; b) $\sum_{k=5}^{10} k^3$; c) $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2$.

9. Determină numărul natural nenul n pentru care:

   a) $1 + 2 + \cdots + n = 78$; b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = 169$; c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 204$.

10. Demonstrează prin inducție matematică că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

    a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

    b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Nivel avansat

11. *Sumă telescopică.*

    a) Verifică egalitatea $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

    b) Calculează $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

    c) Demonstrează prin inducție rezultatul de la b).

12. Calculează $\sum_{k=1}^{n} k(n-k)$, pentru $n \geq 2$. Atenție: în această sumă, n nu depinde de k. Verifică rezultatul pentru $n = 3$.

13. Demonstrează prin inducție că $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

14. *Găsește greșeala.* Un elev calculează astfel: „$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sum_{k=1}^{n} (k+1)$”.

    a) Verifică egalitatea pentru $n = 2$.

    b) Ce proprietate a sumelor a aplicat greșit elevul?

    c) Calculează corect suma.

15. *Provocare.* Calculează $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2$ și $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$. Ce observi? Demonstrează prin inducție că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot k^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$