

# TEORIE SINTETIZATĂ

## Numere reale. Modulul unui număr real. Partea întreagă și partea fracționară

**Legătura cu programa.** Mulțimea numerelor reale, modulul (definiție, proprietăți, interpretare ca distanță), intervalele și inecuațiile în  $\mathbb{R}$  sunt achiziții din clasele a VII-a – a VIII-a, pe care le reactivăm la începutul clasei a IX-a.

Partea întreagă și partea fracționară sunt noțiuni noi. Programa de clasa a IX-a le prevede ca exemple de funcții (funcția modul, funcția parte întreagă, funcția parte fracționară) în Unitatea de învățare 4 – *Funcții. Proprietăți generale*. Aici lucrăm cu ele ca numere; graficele și proprietățile lor ca funcții se studiază în Unitatea 4.

### 1. Mulțimi de numere

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  – numerele naturale;  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  – numerele întregi;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$  – numerele raționale (scriere zecimală finită sau periodică);
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  – numerele iraționale (scriere zecimală infinită și neperiodică), de exemplu  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ ;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ; notații:  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ .

### 2. Relația de ordine pe $\mathbb{R}$ . Intervale

#### 2.1. Proprietăți ale inegalităților

Pentru orice  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ :

- $a \leq b$  și  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$  (tranzitivitate);  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ ;
- $a \leq b$  și  $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$  (inegalitățile de același sens se adună);
- $a \leq b$  și  $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$ ;  $a \leq b$  și  $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$  (se schimbă sensul inegalității!);
- $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ;  $x^2 \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

#### 2.2. Intervale de numere reale

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

| Tipul intervalului | Notăția                      | Mulțimea                                                              |
|--------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| închis             | $[a, b]$                     | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$                           |
| deschis            | $(a, b)$                     | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$                                 |
| semideschis        | $[a, b)$                     | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$                              |
|                    | $(a, b]$                     | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$                              |
| nemărginit         | $[a, +\infty), (a, +\infty)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ |
|                    | $(-\infty, b], (-\infty, b)$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ |

**Exemplu.** Pentru  $A = [-2, 3)$  și  $B = (1, 5]$ :  $A \cap B = (1, 3)$ ,  $A \cup B = [-2, 5]$ ,  $A \setminus B = [-2, 1]$ ,  $B \setminus A = [3, 5]$ .

La  $\pm\infty$  intervalul este întotdeauna deschis: scriem  $[a, +\infty)$ , niciodată  $[a, +\infty]$ .

### 3. Modulul unui număr real

#### 3.1. Definiție. Interpretare geometrică

**Definiție.** Modulul (valoarea absolută) a numărului real  $x$  este:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

- $|x|$  este distanța de la punctul de coordonată  $x$  la originea axei;  $|x - a|$  este distanța dintre punctele de coordonate  $x$  și  $a$ .
- Exemple:  $|-5| = 5$ ;  $|0| = 0$ ;  $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$  (deoarece  $\sqrt{2} < 2$ );  $|\pi - 3| = \pi - 3$  (deoarece  $\pi > 3$ ).

#### 3.2. Proprietățile modului

Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $a > 0$ :

| Nr. | Proprietatea                                                                              | Observații / exemple                     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1   | $ x  \geq 0$ ; $ x  = 0 \Leftrightarrow x = 0$                                            | $ E(x)  = -3$ nu are soluții             |
| 2   | $ -x  =  x $ ; $- x  \leq x \leq  x $                                                     | $ 3 - x  =  x - 3 $                      |
| 3   | $ x \cdot y  =  x  \cdot  y $ ; $\left \frac{x}{y}\right  = \frac{ x }{ y }$ , $y \neq 0$ | $ -2x  = 2 x $                           |
| 4   | $ x ^2 = x^2$ ; $\sqrt{x^2} =  x $                                                        | $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - 1$ |
| 5   | $ x + y  \leq  x  +  y $ (inegalitatea triunghiului)                                      | egalitate $\Leftrightarrow xy \geq 0$    |
| 6   | $  x  -  y   \leq  x - y $                                                                | se obține din proprietatea 5             |
| 7   | $ x  =  y  \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$                                            | $ x  =  y  \Leftrightarrow x^2 = y^2$    |
| 8   | $ x  \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$               | $ x  < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$  |
| 9   | $ x  \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a$                                     | $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$  |

#### 3.3. Calcule: eliminarea modului

Stabilim semnul expresiei din modul (comparând numerele), apoi aplicăm definiția.

**Exemplul 1.**  $a = |\sqrt{3} - 2| + |1 - \sqrt{3}|$ . Cum  $\sqrt{3} < 2$  și  $\sqrt{3} > 1$ :  $a = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) = 1 \in \mathbb{N}$ .

**Exemplul 2.** Pentru  $x \in [-2, 1]$ :  $x - 1 \leq 0$  și  $x + 2 \geq 0$ , deci  $|x - 1| + |x + 2| = (1 - x) + (x + 2) = 3$  (nu depinde de  $x$ ).

**Exemplul 3.**  $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = |\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 2| = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 1$ .

#### 3.4. Ecuații cu modul

| Tipul ecuației    | Metoda de rezolvare                                                                                                   |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ E(x)  = a$      | $a < 0$ : $S = \emptyset$ ; $a = 0$ : $E(x) = 0$ ;<br>$a > 0$ : $E(x) = a$ sau $E(x) = -a$ .                          |
| $ E(x)  =  F(x) $ | $E(x) = F(x)$ sau $E(x) = -F(x)$ .                                                                                    |
| $ E(x)  = F(x)$   | <b>condiție:</b> $F(x) \geq 0$ ;<br>$E(x) = F(x)$ sau $E(x) = -F(x)$ ; păstrăm doar soluțiile care verifică condiția. |

| Tipul ecuației | Metoda de rezolvare                                                                                      |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| sume de module | metoda intervalelor: împărțim axa prin zerourile expresiilor din module și rezolvăm pe fiecare interval. |

**Exemplul 4.**  $|2x - 1| = 5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5$  sau  $2x - 1 = -5 \Leftrightarrow x = 3$  sau  $x = -2$ . Deci  $S = \{-2, 3\}$ .

**Exemplul 5.**  $|x + 1| = 2x - 4$ . Condiția:  $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ .  
 $x + 1 = 2x - 4 \Rightarrow x = 5$  (convine);  $x + 1 = -(2x - 4) \Rightarrow x = 1$  (nu convine,  $1 < 2$ ). Deci  $S = \{5\}$ .

**Exemplul 6.**  $|x| + |x - 2| = 4$ . Zerourile expresiilor din module sunt 0 și 2:

| $x$            | $(-\infty, 0)$                             | $[0, 2)$       | $[2, +\infty)$                            |
|----------------|--------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------|
| $ x $          | $-x$                                       | $x$            | $x$                                       |
| $ x - 2 $      | $2 - x$                                    | $2 - x$        | $x - 2$                                   |
| ecuația devine | $2 - 2x = 4 \Rightarrow x = -1 \checkmark$ | $2 = 4$ , fals | $2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3 \checkmark$ |

Soluțiile găsite aparțin intervalelor corespunzătoare, deci  $S = \{-1, 3\}$ .

### 3.5. Inecuații cu modul

| Tipul inecuației          | Echivalență                                              |
|---------------------------|----------------------------------------------------------|
| $ E(x)  \leq a, a > 0$    | $-a \leq E(x) \leq a$                                    |
| $ E(x)  \geq a, a > 0$    | $E(x) \leq -a$ sau $E(x) \geq a$ (reuniune de intervale) |
| $ E(x)  < a, a \leq 0$    | $S = \emptyset$                                          |
| $ E(x)  \geq a, a \leq 0$ | $S = \mathbb{R}$                                         |

**Exemplul 7.**  $|3x - 2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x - 2 < 4 \Leftrightarrow -2 < 3x < 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$ . Deci  $S = (-\frac{2}{3}, 2)$ .

**Exemplul 8.**  $|x + 3| \geq 2 \Leftrightarrow x + 3 \leq -2$  sau  $x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -5$  sau  $x \geq -1$ . Deci  $S = (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$ .

**Exemplul 9 (distanță).**  $|x - 4| \leq 1$ : punctele aflate la distanță cel mult 1 de punctul 4, adică  $S = [3, 5]$ .

## 4. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

### 4.1. Definiții

**Definiție.** Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  există un singur număr întreg  $k$  astfel încât  $k \leq x < k + 1$ . Acest număr se numește **partea întreagă** a lui  $x$  și se notează  $[x]$ . Așadar  $[x]$  este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu  $x$ .

**Partea fracționară** a lui  $x$  este  $\{x\} = x - [x]$ . (În unele cărți se folosește notația  $\{x\}$ .)

| $x$  | $[x]$ | $\{x\}$ | Justificare         |
|------|-------|---------|---------------------|
| 2,6  | 2     | 0,6     | $2 \leq 2,6 < 3$    |
| -2,6 | -3    | 0,4     | $-3 \leq -2,6 < -2$ |

| $x$         | $[x]$ | $\{x\}$         | Justificare           |
|-------------|-------|-----------------|-----------------------|
| 5           | 5     | 0               | $5 \in \mathbb{Z}$    |
| -0,25       | -1    | 0,75            | $-1 \leq -0,25 < 0$   |
| $\sqrt{10}$ | 3     | $\sqrt{10} - 3$ | $3 < \sqrt{10} < 4$   |
| $-\sqrt{2}$ | -2    | $2 - \sqrt{2}$  | $-2 < -\sqrt{2} < -1$ |

**Atenție!**  $[-2,6] = -3$ , nu  $-2$ . Pentru numerele negative, partea întreagă *nu* se obține „tăind zecimalele”. Partea fracționară este întotdeauna în  $[0, 1)$ :  $\{-2,6\} = -2,6 - (-3) = 0,4$ .

## 4.2. Proprietăți

Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $k \in \mathbb{Z}$ :

| Nr. | Proprietatea                                                                                                                                                    | Observații / exemple                                    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1   | $[x] \leq x < [x] + 1$ ; echivalent: $x - 1 < [x] \leq x$                                                                                                       | $[x] \in \mathbb{Z}$                                    |
| 2   | $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k + 1 \Leftrightarrow x \in [k, k + 1)$                                                                                     | $[x] = \frac{5}{2}$ nu are soluții                      |
| 3   | $x = [x] + \{x\}$ ; $0 \leq \{x\} < 1$ ; $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$                                                                           | $\{x\} = 1,2$ nu are soluții                            |
| 4   | $[x + k] = [x] + k$ ; $\{x + k\} = \{x\}$                                                                                                                       | $[x + 3] = [x] + 3$                                     |
| 5   | $[x] + [-x] = 0$ dacă $x \in \mathbb{Z}$ , $= -1$ dacă $x \notin \mathbb{Z}$<br>$\{x\} + \{-x\} = 0$ dacă $x \in \mathbb{Z}$ , $= 1$ dacă $x \notin \mathbb{Z}$ | $[\pi] + [-\pi] = 3 + (-4) = -1$                        |
| 6   | $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$                                                                                                                             | implicația reciprocă este falsă                         |
| 7   | $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$                                                                                                                     | egalitate în stânga $\Leftrightarrow \{x\} + \{y\} < 1$ |
| 8   | $[x] \leq k \Leftrightarrow x < k + 1$ ; $[x] < k \Leftrightarrow x < k$ ; $[x] \geq k \Leftrightarrow x \geq k$                                                | utile la inecuații                                      |
| 9   | $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ (identitatea lui Hermite)                                                                                           | extindere – demonstrația: fișa de lucru, itemul 29      |

## 4.3. Calcule

**Exemplul 10.**  $49 \leq 50 < 64 \Rightarrow 7 \leq \sqrt{50} < 8$ , deci  $[\sqrt{50}] = 7$ ,  $\{\sqrt{50}\} = \sqrt{50} - 7 = 5\sqrt{2} - 7$ , iar  $[-\sqrt{50}] = -8$ .

**Exemplul 11.**  $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{8}]$ . Pentru  $n \in \{1, 2, 3\}$  avem  $[\sqrt{n}] = 1$ , iar pentru  $n \in \{4, \dots, 8\}$  avem  $[\sqrt{n}] = 2$ . Deci  $S = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$ .

## 4.4. Ecuatii cu parte întreagă și parte fracționară

| Tipul ecuației                 | Metoda de rezolvare                                                                                                                                |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $[E(x)] = k, k \in \mathbb{Z}$ | $k \leq E(x) < k + 1$ (dacă membrul drept nu este întreg, $S = \emptyset$ ).                                                                       |
| $[E(x)] = F(x)$                | notăm $F(x) = k \in \mathbb{Z}$ , exprimăm $x$ în funcție de $k$ , impunem $k \leq E(x) < k + 1$ , aflăm valorile întregi ale lui $k$ , apoi $x$ . |
| ecuații cu $[x]$ și $\{x\}$    | scriem $x = k + f$ , cu $k = [x] \in \mathbb{Z}$ și $f = \{x\} \in [0, 1)$ .                                                                       |
| expresii în $[x]$              | substituția $t = [x]$ , cu $t \in \mathbb{Z}$ .                                                                                                    |

**Exemplul 12.**  $\left[\frac{x-1}{2}\right] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{x-1}{2} < 4 \Leftrightarrow 6 \leq x - 1 < 8 \Leftrightarrow 7 \leq x < 9$ . Deci  $S = [7, 9)$ .

**Exemplul 13.**  $\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$ . Notăm  $\frac{x-1}{2} = k \in \mathbb{Z}$ , deci  $x = 2k + 1$  și  $\frac{x+2}{3} = \frac{2k+3}{3}$ .

$$k \leq \frac{2k+3}{3} < k+1 \Leftrightarrow 3k \leq 2k+3 < 3k+3 \Leftrightarrow 0 < k \leq 3 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow S = \{3, 5, 7\}.$$

**Exemplul 14.**  $2[x] = 3\{x\}$ . Cu  $x = k + f$ :  $2k = 3f$ , deci  $f = \frac{2k}{3} \in [0, 1) \Leftrightarrow 0 \leq 2k < 3 \Rightarrow k \in \{0, 1\}$ .

$$k = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow x = 0; \quad k = 1 \Rightarrow f = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}. \text{ Deci } S = \{0, \frac{5}{3}\}.$$

**Exemplul 15.**  $[x]^2 - 3[x] + 2 = 0$ . Cu  $t = [x]$ :  $(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow [x] \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in [1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$ .

#### 4.5. Inecuații cu parte întreagă

**Exemplul 16.**  $[2x - 1] < 3 \Leftrightarrow [2x - 1] \leq 2 \Leftrightarrow 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow x < 2$ . Deci  $S = (-\infty, 2)$ .

**Exemplul 17.**  $-1 \leq \left[\frac{x}{2}\right] \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < 4$ . Deci  $S = [-2, 4)$ .

#### 5. Greșeli frecvente

| Greșit                                                         | Corect                                                        |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\sqrt{x^2} = x$                                               | $\sqrt{x^2} =  x $                                            |
| $ a + b  =  a  +  b $                                          | $ a + b  \leq  a  +  b $ , cu egalitate doar dacă $ab \geq 0$ |
| $ x  = -3 \Rightarrow x = \pm 3$                               | $ x  \geq 0$ , deci ecuația nu are soluții                    |
| $ x - 3  = 2x \Rightarrow x - 3 = \pm 2x$ , fără alte condiții | întâi condiția $2x \geq 0$ , apoi verificarea soluțiilor      |
| $ x  < a \Rightarrow x < a$                                    | $ x  < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ( $a > 0$ )              |
| $[-3, 4] = -3$                                                 | $[-3, 4] = -4$ și $\{-3, 4\} = 0, 6$                          |
| $[2x] = 2[x]$                                                  | fals în general: $[2 \cdot 0, 5] = 1$ , dar $2[0, 5] = 0$     |
| $[x + y] = [x] + [y]$                                          | adevărat doar dacă $\{x\} + \{y\} < 1$                        |

#### 6. Algoritm general pentru ecuații și inecuații

1. Identific tipul ecuației/inecuației (tabelele de la 3.4, 3.5 și 4.4).
2. Scriu condițiile: membrul drept  $\geq 0$  (la  $|E(x)| = F(x)$ ),  $k \in \mathbb{Z}$  (la parte întreagă),  $f \in [0, 1)$  (la parte fracționară).
3. Rezolv pe cazuri sau pe intervale.
4. Intersectez soluțiile fiecărui caz cu intervalul sau condiția cazului respectiv.
5. Reunesc soluțiile și scriu mulțimea S (ca mulțime finită sau ca interval/reuniune de intervale).
6. Verific prin înlocuire cel puțin o soluție.