

TEORIE SINTETIZATĂ – GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI VECTORI (CLASA A X-A)

Profil: Matematică-Informatică | **Pondere Bacalaureat:** Subiectul I, Exercițiul 5

1. Vectori în Plan (Sistemul Cartezian)

Fie punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ și vectorii de poziție $\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$, $\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$.

- **Vectorul liber $\overrightarrow{AB}$:**

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

- **Lungimea (modulul) unui vector $\vec{v} = a \vec{i} + b \vec{j}$:**

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Distanța dintre două puncte A și B :**

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- **Suma și diferența vectorilor:**

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}, \vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$$

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (a_1 \pm a_2) \vec{i} + (b_1 \pm b_2) \vec{j}$$

- **Înmulțirea cu un scalar:**

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha a_1) \vec{i} + (\alpha b_1) \vec{j}$$

- **Condiția de coliniaritate a doi vectori:**

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

- **Produsul scalar:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

- **Cosinusul unghiului dintre doi vectori:**

$$\cos(\theta) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

- **Condiția de perpendicularitate a doi vectori:**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

2. Puncte Remarcabile și Segmente

- **Mijlocul M al segmentului $[AB]$:**

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

- **Punctul M care împarte $[AB]$ în raportul $k = \frac{MA}{MB}$:**

$$x_M = \frac{x_A + k x_B}{1+k}, y_M = \frac{y_A + k y_B}{1+k} \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k \vec{r}_B}{1+k}$$

- **Centrul de greutate G al $\triangle ABC$:**

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow \vec{r}_G = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$$

3. Ecuațiile Drepte în Plan

- **Panta unei drepte (m):**

- Prin unghiul α făcut cu axa Ox : $m = \operatorname{tg}(\alpha)$
- Prin două puncte A și B : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (unde $x_A \neq x_B$)

- **Forme ale ecuației drepte:**

- **Explicită:** $y = mx + n$ (m = panta, n = tăietura pe axa Oy)
- **Generală:** $aX + bY + c = 0$ (panta $m = -\frac{a}{b}$)
- **Prin punct $A(x_0, y_0)$ și pantă m :**

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **Prin două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$:**

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

- **Prin tăieturi (intersecțiile cu axele):** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

4. Poziții Relative a Două Drepte

Fie $d_1: y = m_1 x + n_1$ și $d_2: y = m_2 x + n_2$ (sau în forma generală $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$):

- **Paralelism:**

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

- **Perpendicularitate:**

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

- **Identice (Coincid):**

$$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ și } n_1 = n_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- **Secante (Intersecție într-un punct):**

$m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow$ Sistemul format din ecuațiile celor două drepte are soluție unică.

5. Distanțe și Arii

- **Distanța de la un punct $P(x_0, y_0)$ la o dreaptă $d: aX + bY + c = 0$:**

$$\text{dist}(P, d) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6. Idei și Strategii Frecvente la BAC (Subiectul I, Ex. 5)

Tip de problemă	Strategie de rezolvare
Dreaptă paralelă cu d prin A	Scrii panta m_d. Panta dreptei căutate este $m = m_d$. Aplici $y - y_A = m(x - x_A)$.
Dreaptă perpendiculară pe d prin A	Calculezi m_d. Panta căutată este $m = -\frac{1}{m_d}$. Aplici $y - y_A = m(x - x_A)$.
Simetricul punctului A față de B	Punctul B este mijlocul segmentului $[AA']$. Aplici $x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$, $y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$.
Simetricul punctului A față de o dreaptă d	1. Construiești $d' \perp d$ prin A. 2. Afli $M = d \cap d'$ (proiecția lui A). 3. M este mijlocul lui $[AA']$.
Calculul înălțimii din A în $\triangle ABC$	1. Calculezi panta m_{BC}. 2. Panta înălțimii este $m_{h_A} = -\frac{1}{m_{BC}}$. 3. Scrii ecuația $y - y_A = m_{h_A}(x - x_A)$.
Echilibrul de vectori (Paralelogram)	$ABCD$ paralelogram $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$.